

## Inžinierske aspekty difúzných procesov pri údení

ALBÍN ŠTOFILA

SÚHRN. Vychádzajúc z rovnice popisujúcej prestup dymu v stanovenej vzorke, ktorá platí pre celý kontrolovaný objem bez obmedzenia a vychádzajúc z valcovitého tvaru vzorky a akceptácie všetkých okrajových a počiatočných podmienok pre náš prípad, je možné napísať rovnicu:

$$c_A(R,t) = c_{Af} \cdot \left\{ 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \left[ A_i \cdot e^{-\mu_i^2 \cdot F_{0D}} \cdot J_0\left(\mu_i \cdot \frac{R}{R_0}\right) \right] \right\}$$
$$A_i = \frac{2}{\mu_i \cdot J_1(\mu_i)}$$

kde  $c_A(R,t)$  je koncentrácia látky A na polomere R v čase t,  $c_{Af}$  - koncentrácia na povrchu výrobku,  $A_i$  - konštanta,  $J_1(\mu_i)$  - Besselova funkcia,  $\mu_i$  - korene Besselovej funkcie,  $F_{0D}$  - Fourierovo difúzne číslo.

KLÚČOVÉ SLOVÁ: údenie; difúzia; dym; koncentrácia; koncentračné pole

Napriek rozvoju rôznych spôsobov opracovania potravinárskych výrobkov údenie má a zrejme bude mať význam aj v budúcnosti pri spracovaní predovšetkým typicky údenárskych výrobkov, ako sú mäsové výrobky, ryby a syry. V súčasnosti však vzhľadom na rýchlu distribúciu a spotrebu ustupuje do úzadia pôvodná, základná požiadavka na údeniny, aby boli čo najdlhšie uskladniteľné a do popredia sa dostávajú nové požiadavky, ako napr. vytvorenie typickej farby, aromatických a chuťových látok a ich rovnomerné rozloženie na výrobku tak, aby ten istý druh výrobku mal vždy rovnaké vlastnosti vyúdenia. To je však možné docieľiť len pri stálej kvalite použitého dymu.

Cieľom našej práce bolo vypracovať matematický model popisujúci koncentračné pole v údenom výrobku a overiť ho na konkrétnom výrobku.

Vychádzajúc zo zjednodušeného modelu jednosmernej difúzie do valcovitého telesa, matematický popis vedie k parciálnej diferenciálnej rovnici druhého poriadku, ktorú je potrebné riešiť za daných počiatočných podmienok.

---

Ing. Albín ŠTOFILA, CSc., Katedra chemických strojov a zariadení, Strojnícka fakulta, Slovenská technická univerzita, Nám. slobody 17, 812 31 Bratislava.  
Tel. (07) 57296 417, e-mail: stofila@kchsz.sjf.stuba.sk

## Rovnica popisujúca rozloženie koncentračného poľa vo valcovitom výrobku

Rozpracované poznatky z teórie prestupu látok [1,2] nám umožňujú bližšie popísať koncentračné pole pri údení potravinárskych výrobkov.

Vychádzajúc z platnosti rovnice popisujúcej prestup dymu v stanovenej vzorke

$$\int_V \frac{\partial c_A}{\partial t} \cdot dV = \int_V D_{ef} \cdot \nabla^2 \cdot c_A \cdot dV + \int_V r_A \cdot dV \quad (1)$$

ktorá platí pre celý kontrolný objem bez obmedzenia, berúc do úvahy valcovitý tvar vzorky, zanedbávajúc pritom zdrojový člen  $r_A$ , po zohľadnení všetkých okrajových a počiatočných podmienok platiacich pre náš prípad, t. j. - o údiacom výrobku predpokladáme, že je homogénny, symetrický valec a prestup látky do valca je po celom obvode valca rovnaký, že má pozdĺžny rozmer, t. j. budeme ho považovať za nekonečné teleso, ktorého os je totožná s koordinátou „z“ a platia preň nasledovné podmienky jednoznačnosti:

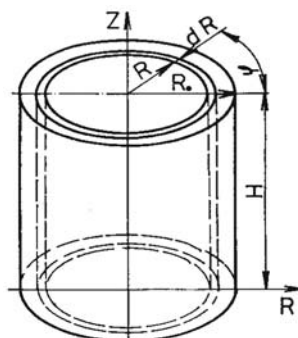
$$c_{Af}(t) = \text{konštanta}, t = 0, c_A(R, 0) = 0,$$

$$R = 0,$$

$$\left( \frac{\partial c_A}{\partial R} \right)_{R=0} = 0$$

$$R = R_0, c_A(R = R_0, t) = c_{Af} = \text{konštanta},$$

$$t = \infty, c_A(R, t = \infty) = c_{Af} = \text{konštanta}.$$



OBR. 1. Popis charakteristických rozmerov vzorky v cylindrických súradniciach.

FIG. 1. Description of characteristic dimensions of sample in the cylindrical coordinates.

Bude platiť:

$$c_A(R, t) = c_{Af} \cdot \left\{ 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \left[ A_i \cdot e^{-\mu_i \cdot F_{0D}} \cdot J_0\left(\mu_i \cdot \frac{R}{R_0}\right) \right] \right\} \quad (2)$$

kde  $c_A(R, t)$  je koncentrácia látky A na polomere R v čase t,  $c_{Af}$  - koncentrácia na povrchu výrobku,  $A_i$  - konštanta,

$$A_i = \frac{2}{\mu_i \cdot J_1(\mu_i)}$$

$J_1(\mu_i)$  - Besselova funkcia,  $\mu_i$  - korene Besselovej funkcie,

$$F_{0D} = \frac{D_{ef} \cdot t}{R_0^2}$$

pričom  $D_{ef}$  je efektívny súčiniteľ difúzie, t - čas,  $R_0$  - polomer valcovitého výrobku.

Rovnica (2) nám popisuje rozloženie koncentračného poľa vo valcovitom výrobku v závislosti na premenných R a t. Popis charakteristických rozmerov vzorky v cylindrických súradniciach je na obr. 1.

### Výpočet efektívneho súčiniteľa difúzie $D_{ef}$

Zo vzťahu (2) nemôžeme priamo prikrčiť k výpočtu  $D_{ef}$ , pretože nepoznáme  $c_A(R, t)$ . Vieme však, že množstvo látky zložky A vo valci polomeru  $R_0$ , ktoré počas času údenia t prešlo do vzorky, vypočítame zo vzťahu

$$m_A = \pi \cdot R_0^2 \cdot H \cdot \rho \cdot C_A \quad (3)$$

kde  $C_A$  je stredná koncentrácia zložky A v uvažovanej vzorke vyjadrená hmotnostným zlomkom,  $\rho$  - hustota vzorky.

Do diferenciálneho elementu tej istej vzorky za čas t prejde difúziou množstvo látky

$$dm_A = 2\pi \cdot R \cdot dR \cdot H \cdot \rho \cdot C_A(R, t) \quad (4)$$

Pre  $dR$  veľmi malé platí

$$C_A(R, t)_{dR \rightarrow 0} = c_A(R, t) \quad (5)$$

Celkové množstvo zložky A v celej vzorke dostaneme integrovaním (4) a po zohľadnení (5) v (4) v hraniciach  $(0, R_0)$

$$m_A = \int_0^{R_0} 2\pi \cdot R \cdot dR \cdot H \cdot \rho \cdot c_A(R, t) \quad (6)$$

Z rovnice (3) a (6) pre strednú koncentráciu zložky A vyplýva

$$C_A(R_0, t) = \frac{2}{R_0^2} \int_0^{R_0} c_A(R, t) \cdot R \cdot dR \quad (7)$$

resp. po zohľadnení (2)

$$C_A = \frac{2 \cdot c_{Af}}{R_0^2} \int_0^{R_0} \left[ 1 - \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cdot e^{-\mu_i^2 \cdot F_{0D}} \cdot J_0\left(\mu_i \frac{R}{R_0}\right) \right] \cdot R \cdot dR \quad (8)$$

Integrál vo vzťahu (8) môžeme rozložiť na dva integrály. Riešením prvého dostaneme

$$\int_0^{R_0} R \cdot dR = \left[ \frac{R^2}{2} \right]_0^{R_0} = \frac{R_0^2}{2} \quad (9)$$

Riešením druhého integrálu dostaneme

$$\int_0^{R_0} \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cdot e^{-\mu_i^2 \cdot F_{0D}} \cdot J_0\left(\mu_i \frac{R}{R_0}\right) \cdot R \cdot dR = R_0^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{\mu_i} \cdot e^{-\mu_i^2 \cdot F_{0D}} \cdot J_1(\mu_i) \quad (10)$$

Zohľadnením (9) a (10) v (8) dostaneme

$$\frac{C_A}{c_{Af}} = 1 - 4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu_i^2 \cdot F_{0D}}}{\mu_i^2} \quad (11)$$

Podobným spôsobom môžeme odvodiť vzťah platiaci pre prvú vrstvu o hrúbke  $R_0 - R_1$ . Výsledné riešenie bude:

$$\frac{C_{A1}}{c_{Af}} = 1 - \frac{R_0^2}{R_0^2 - R_1^2} \sum_{i=1}^{\infty} D_i \cdot e^{-\mu_i^2 \cdot F_{0D}} \cdot \left[ J_1(\mu_i) - \frac{R_1}{R_0} \cdot J_1\left(\mu_i \frac{R_1}{R_0}\right) \right] \quad (12)$$

kde

$$D_i = \frac{4}{\mu_i^2 \cdot J_1(\mu_i)} \quad (13)$$

Vo vzťahoch (11) a (12) jedinou neznámou je

$$F_{0D} = \frac{D_{ef} \cdot t}{R_0^2}$$

a teda ľubovoľný z nich môžeme použiť na výpočet  $D_{ef}$ .

### Analýza teoretického riešenia

Vzťah (2) opisuje rozloženie koncentrácie zložky A vo valcovitom telese pri okrajových podmienkach 1. druhu. Koncentrácia zložky A v údiacom médiu, či ide o teplovzdušný alebo kvapalný dym, je konštantná. Táto podmienka pri ustálenom režime experimentálneho zariadenia je zabezpečená. Koncentráciu zložky A v nádobe s kvapalným dymom vzhľadom na pomer hmotnosti údiaceho preparátu  $m_D$  k hmotnosti syra  $m_S$  ( $m_D/m_S = 106,66$ ) môžeme počas pokusu s dostatočnou presnosťou považovať za konštantnú. Konštanty  $\mu_i$  a  $A_i$  v rovnici (8) sú funkciou Biotovho difúzneho čísla. Odpor, ktorý kladie syr, t. j. tuhá látka, difúzii je podstatne väčší ako odpor prestupu látky z média na povrch telesa. To znamená, že veľkosť Biotovho čísla bude podstatne väčšia ako 100. V takých prípadoch podľa [3,4] a iných literárnych zdrojov možno s dostatočnou presnosťou uvažovať s  $B_i = \infty$  a potom korene  $\mu_i$  sú koreňmi Besselovej funkcie  $J_0(\mu) = 0$ . V bežnej literatúre sú korene  $\mu_i$  a konštanty  $A_i$  tabelované v závislosti od čísla  $B_i$  a prvých 6 koreňov [4]. O počte potrebných koreňov pre vyčíslenie vzťahu (2) bude potrebné uvažovať v súvislosti s veľkosťou Furierovho čísla  $F_{oD}$ . Literatúra [3,4] udáva, že pre valcovité teleso pri  $F_{oD} > 0,25$  postačuje brať do riešenia iba jeden koreň.

Veľkosť  $F_{oD}$  závisí od troch veličín: difuzivity  $D_{ef}$ , času  $t$ , charakteristického rozmeru  $R_0$ .

V našom prípade  $R_0 = 35 \cdot 10^{-3}$  m. Čas pri údení bol maximálne štyri hodiny. Dôležitou veličinou je difuzivita. Ide o difuzivitu zložky A v tuhom telese. Tento látkový parameter je jedinou neznámou veličinou vo vzťahu (13), ak berieme do úvahy, že pri experimente budeme vedieť zmerať koncentráciu údiaceho média  $c_{Af}$ , čas  $t$  a koncentráciu zložky A v syre  $C_A(R_0, t)$ . Pre ďalšie úvahy potrebujeme aspoň približne odhadnúť veľkosť difuzivity  $D_{ef}$ . Podľa [5] veľkosť difuzivity sa rádovo pohybuje: pre plyny  $10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , pre kvapaliny  $10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , pre tuhé látky  $10^{-11}$  až  $10^{-19} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

Z uvedeného je zrejmé, že hodnota  $F_{oD}$  bude i pri čase  $t = 4$  h veľmi malá. Preto pre vyčíslenie vzťahu budeme potrebovať podstatne väčší počet koreňov  $\mu_i$  a konštant  $A_i$ , ako je v bežnej literatúre uvádzané.

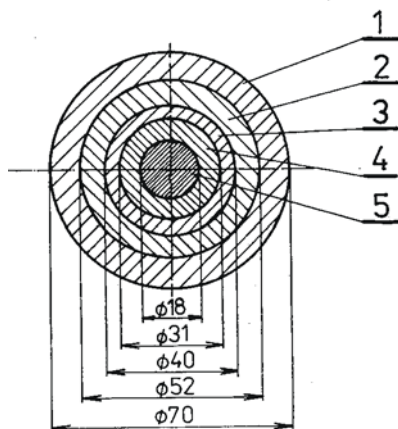
Pri odvodzovaní rovnice prestupu látky a získaní vzťahu pre koncentračné pole sme doteraz uvažovali so zložkou A. Dym však obsahuje veľké množstvo rôznych látok (asi 1000), z ktorých len 300 je známych. Aplikovať riešenie (13) na všetky látky, ktoré dym obsahuje, je prakticky nemožné. Difuzivita rôznych zložiek dymu v syre bude mať rôznu hodnotu a bolo by potrebné určiť jej efektívnu veľkosť a s touto potom uvažovať. Takáto úloha je zložitá, pretože by bolo potrebné mať snímač, ktorý by v syre zisťoval kvan-

titatívne množstvo látky. Okrem toho u niektorých zložiek dymu možno predpokladať, že v povrchových vrstvách reagujú so syrom (charakteristické zafarbenie povrchových vrstiev syra), to znamená, že v priebehu difúzie dochádza k chemickej reakcii dymových zložiek a vo všeobecnej bilančnej rovnici by bolo potrebné uvažovať so záporným zdrojom zložky  $r_A$ .

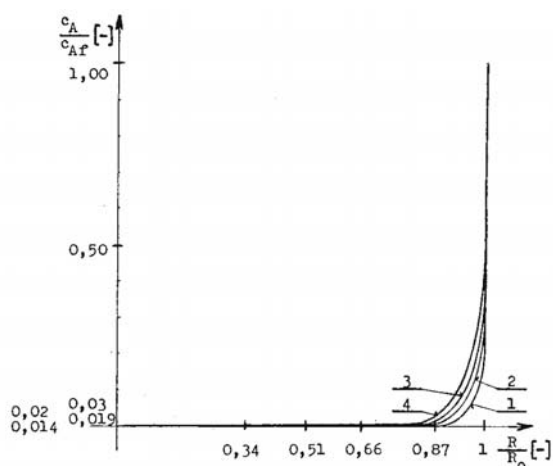
### Experimentálne zisťovanie koncentračného poľa

Vzhľadom na uvedené zložitosti problému sa pri experimentálnom overení riešenia (13) budeme zaoberať jednou zo zložiek, ktorá podľa [6] patrí medzi najdôležitejšie zložky dymu pri údení, a to fenolmi. Pre kvantitatívne meranie množstva fenolov vo výrobku a v údiacom médiu sme použili metódu podľa Antona Copulosa s následnou extrakciou podľa Sumarkova, ktoré sú bližšie popísané v [7].

Na odber vzoriek a kalibráciu údeného syra Eidam sme použili špeciálne na tento účel navrhnuté a vyrobené vykrajovacie zariadenie. Valcovitý tvar syra sme kalibrovali pomocou najväčšieho vykrajovača. Po údení sme syr rozkrojili na tri časti, pričom rez vedený kolmo na os syra bol od konca minimálne vo vzdialenosti rovnajúcej sa priemeru syra. Strednú časť syra sme vsunuli do najväčšieho vykrajovača a pomocou vodiacich puzdier a jednotlivých vykrajovačov sme zo syra povykrajovali medzikružia (obr. 2).



OBR. 2. Rozdelenie vzorky na jednotlivé medzikružia.  
FIG. 2. Division of sample into individual annuli.



OBR. 3. Závislosť koncentrácie fenolov vo vzorke od polohy a času pri konštantnej koncentrácii fenolov v okolí.

FIG. 3. Phenol concentration as a function of position and time at the stabil phenol concentration in environment.

$D_{ef}$  vypočítame na základe nameraných kriviek koncentračného poľa a na základe následného chemického analyzovania koncentrácií jednotlivých vykrojených vzoriek v závislosti od polohy a času v súlade s literatúrou [6,7].

Spomínané namerané závislosti sú zobrazené graficky na obr. 3. Krivka „1“ je nameraná po 3600 s údenia syra Eidam valcovitého tvaru  $\varnothing$  0,07 m, „2“ po 7200 s, „3“ po 10800 s a „4“ po 14400 s ( $c_{Af} = 9,98 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{kg}^{-1}$ ).

### Orientačný výpočet difuzivity

Vyššie odvodené vzťahy sú vhodné pre výpočet difuzivity vo valcovitom telese polomeru  $R_0$  a výšky  $H$ , za predpokladu, že poznáme  $c_{Af}$ ,  $C_A$ , prípadne  $C_{A1}$ . Pretože veľkosť difuzivity  $D_{ef}$  a teda i  $F_{0D}$  je veľmi malá, vzťah (12) sa pre orientačný výpočet nehodí, keďže k vyčísleniu sumy je potrebný veľký počet členov  $J_0(\mu_i)$  a  $J_1(\mu_i)$ , ktoré však bežná literatúra neuvádza. Naopak vzťah (11) je možné použiť na orientačný výpočet difuzivity, nakoľko hodnoty  $\mu_i$  pre  $i = 1$  až 40 môžeme zistiť, napr. v literatúre [8]. Juškov [8] uvádza aj hodnoty Besselových funkcií  $J_0(x)$  a  $J_1(x)$ , ale len pre argument  $x < 15,6$ , pričom  $\mu_{40} = 124,87931$ , z čoho vyplýva, že ak by sme chceli vypočítať  $D_{ef}$  v obidvoch prípadoch s rovnakou presnosťou, potrebovali by sme hodnoty

uvedených funkcií až do hodnoty argumentu  $x = 124,87931$ . Z uvedeného dôvodu orientačný výpočet  $D_{ef}$  prevedieme použitím vzťahu (11). Pre určenie strednej koncentrácie fenolov v syre valcovitého tvaru použijeme vzťah

$$C_A \cdot \pi \cdot R_0^2 \cdot H = \sum_{i=1}^5 C_{Ai} \cdot \pi \cdot (R_{i-1}^2 - R_i^2) \cdot H \quad (14)$$

kde  $C_{Ai}$  je stredná koncentrácia fenolov experimentálne nameraná v  $i$ -tej medzikružnej vrstve.

Dosadením  $C_A$  vyjadrenej z (14) do (11) dostaneme vzťah pre náš prípad, z ktorého vypočítame  $D_{ef1}$ ,  $D_{ef2}$ ,  $D_{ef3}$ ,  $D_{ef4}$ . Výslednú difuzivitu určíme potom zo vzťahu:

$$D_{ef} = \frac{D_{ef1} + D_{ef2} + D_{ef3} + D_{ef4}}{4} \quad (15)$$

Experimentálne zistenie koncentračného poľa fenolov v údených syroch potvrdilo predpoklad, že difúzia dymu počas štyroch hodín prebieha iba v povrchových vrstvách a že s dostatočnou presnosťou môžeme na výpočet  $D_{ef}$  použiť rovnicu (11). Podľa uvedeného vzťahu je  $D_{ef} = 1,184 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , čo zodpovedá údajom uvedeným v časti Analýza teoretického riešenia.

## Záver

Pre splnenie cieľa, vypracovať matematický model popisujúci koncentračné pole v údenom výrobku a overiť ho na konkrétnom výrobku, bolo navrhnuté experimentálne zariadenie na výrobu dymu, údenie, odber vzoriek, meranie potrebných fyzikálnych veličín výrobku, ako aj údiaceho preparátu, ktoré je vhodné na bližší popis procesu údenia potravinárskych výrobkov a tiež charakterizáciu samotnej experimentálnej stanice.

Odvođené matematické vzťahy, ako aj praktické pokusy potvrdzujú, že koncentrácia dymových látok vo výrobku smerom k osi prudko klesá k nulovej hodnote aj po štyroch hodinách údenia, kedy je už syr preúdený. Najefektívnejším údením sa javí údenie v kvapalnom dyme, kde dosahujeme požadovanú vyúdenosť už v priebehu 300 sekúnd. Efektívne sa javí aj údenie v komorovej údiarni s čiastočnou regeneráciou dymu cez generátor dymu. Tým, že zvýšime koncentráciu údiacich látok v dyme, môžeme dospieť k zníženiu doby údenia na polovicu v porovnaní s klasickým údením.

Napriek tomu, že údenie patrí medzi najstaršie spôsoby opracovania potravinárskych výrobkov, z procesného hľadiska, ako aj z hľadiska vplyvu na ľudí a životné prostredie, je málo prebádané. Z technologického hľadiska



by bolo najefektívnejšie primiešať kvapalný dym priamo do potravinárskeho výrobku, ale vzhľadom na vyššie povedané, napriek tomu, že v niektorých štátoch to normy povoľujú, len veľmi ťažko môžeme predpokladať, aký účinok bude mať na pravidelných konzumentov takýchto výrobkov po určitej dobe.

Z hľadiska predloženej teórie potvrdené praktickými experimentami na syre Eidam môžeme vysloviť názor, že údiace látky sa do výrobku počas údenia dostanú len do povrchovej vrstvy, kde navyše reagujú s danou potravinou, ale aj medzi sebou navzájom, čím na povrchu výrobku vytvoria súvislú vrstvičku, ktorá slúži ako ochranný obal a pri oxidácii za prítomnosti vzduchu tvorí charakteristické sfarbenie, vôňu a chuť údenárskeho výrobku.

## Literatúra

1. CRANK, J.: The mathematics of diffusion. 2 vyd. Oxford : Clarendon Press, 1975. 414 s.
2. DITL, P.: Difúzně separační pochody. Praha : České vysoké učení technické, 1996. 226 s.
3. MADLO, V.: Teoretické základy odboru. Bratislava : Edičné stredisko, Slovenská vysoká škola technická, 1983. 308 s.
4. ZELNÍK, A. - MADLO, V.: Tepelné pochody I. Bratislava : Edičné stredisko, Slovenská vysoká škola technická, 1980. 164 s.
5. KATTANEK, S. - TRIPPLER, S.: Grundlage der Verfahrenstechnik. 2 Lehrbrief. Magdeburg : Technische Hochschule Otto von Guericke, 1977. 63 s.
6. DUBRAVICKÝ, J. a kol.: Výskum technológie výroby nového údiaceho preparátu. [Výskumna správa čiastkovej úlohy.] Bratislava : Chemickotechnologická fakulta, Slovenská vysoká škola technická, 1985. 111 s.
7. HROZOVÁ, J.: Spôsoby aplikácie údiacich preparátov. [Diplomová práca.] Bratislava : Chemickotechnologická fakulta, Slovenská vysoká škola technická, 1985. 78 s.
8. JUŠKOV, P. P.: Funkcii Bessela i ich priloženie k zadačam ob ochlaždeniji cilindra. 1. vyd. Minsk : Akademia Nauk Beloruskej SSR, 1962. 169 s.

Do redakcie došlo 6.7.1999.

## Engineering applied at smoke-drying diffusion process

ŠTOFILA, A.: Bull. potrav. Výsk., 38, 1999, p. 261-270.

SUMMARY. Based on the equation describing penetration of smoke in a defined specimen, which is effective for whole checked volume with no limitation and based on the cylindrical shape of the sample and on acceptance all of the initial and border conditions for our case, it is possible to write the equation:

$$c_A(R, t) = c_{Af} \cdot \left\{ 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \left[ A_i \cdot e^{-\mu_i^2 \cdot F_{0D}} \cdot J_0\left(\mu_i \cdot \frac{R}{R_0}\right) \right] \right\}$$

$$A_i = \frac{2}{\mu_i J_1(\mu_i)}$$

where  $c_A(R, t)$  is the concentration of the substance A on radius R in time t,  $c_{Af}$  - the concentration of the substance on the top of the product,  $A_i$  - a constant,  $J_1(\mu_i)$  - the Bessel function,  $\mu_i$  - roots of the Bessel function,  $F_{0D}$  - the Fourier diffusion number.

**KEYWORDS:** smoke-drying; diffusion; smoke; concentration; concentration field